第 5 节 三角函数图象性质综合问题（★★★☆）

内容提要

本节收录几类三角函数图象性质有关的综合题，这类题常在偏压轴位置，难度较高.

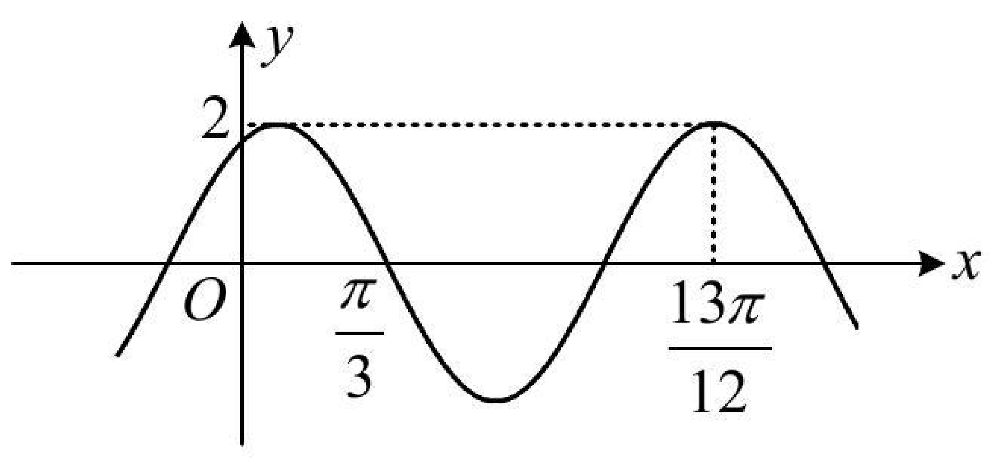
1．数形结合综合分析：有的题用代数方法翻译条件较复杂，此时可考虑结合图象来分析.

2．非合一结构的三角函数图象性质分析：对于不能化成 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+B$ 这种形式的三角函数图象性质的综合题，一般优先尝试看能否画图分析；对于不易画图的，若有绝对值，就分类讨论去绝对值，若有根号，则凑平方去根号；否则就直接用代数的方法验证选项（如单调性可求导，对称性、周期性可验证解析式是否满足对应的恒等式等）.

典型例题

类型Ⅰ：数形结合综合分析

【例 1】（2021·全国甲卷）已知函数 $f(x)=2\cos(\omega x+\varphi)$ 的部分图象如图所示，则满足条件 $(f(x)-f(-\frac{7\pi}{4}))(f(x)-f(\frac{4\pi}{3}))>0$ 的最小正整数 x 为_____.



解析：由图可知，$\frac{13\pi}{12}-\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}T$，所以 $T=\pi$，于是可将 $f(-\frac{7\pi}{4})$ 和 $f(\frac{4\pi}{3})$ 化为 $f(\frac{\pi}{4})$ 和 $f(\frac{\pi}{3})$，便于标注，

所以 $(f(x)-f(-\frac{7\pi}{4}))(f(x)-f(\frac{4\pi}{3}))>0$ 即为 $(f(x)-f(\frac{\pi}{4}))(f(x)-f(\frac{\pi}{3}))>0$ ①，

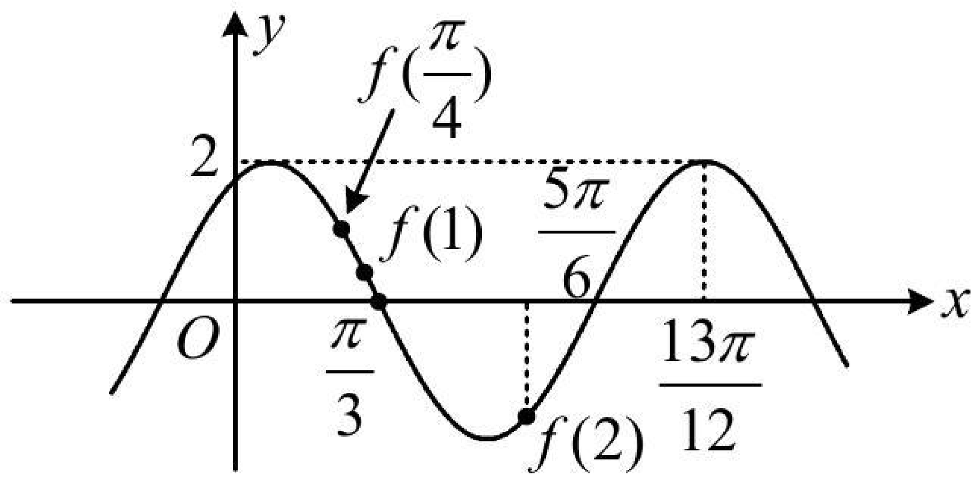
我们直接把 $f(\frac{\pi}{4})$ 和 $f(\frac{\pi}{3})$ 在图中标出来，就能分析不等式①的最小正整数解了，

如图，$f(1)$ 介于 $f(\frac{\pi}{4})$ 和 $f(\frac{\pi}{3})$ 之间，所以 $x=1$ 不满足不等式①，

$f(2)$ 比 $f(\frac{\pi}{4})$ 和 $f(\frac{\pi}{3})$ 都小，所以 $x=2$ 满足不等式①，

故满足原不等式的最小正整数 x 为 2.

答案：2



【反思】本题也可根据图象求出 $f(x)$ 的解析式，再分析所给不等式，但显然没有数形结合来得清晰快捷.

【例 2】已知函数 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})-2\sin^2(x+\frac{\pi}{6})+1$，把 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，得到函数 $g(x)$ 的图象，若 x_1， x_2 是 $g(x)=m$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 内的两根，则 $\sin(x_1+x_2)$ 的值为（　　）

（A）$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　（B）$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　（C）$-\frac{\sqrt{5}}{5}$　　（D）$-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

解析：由题意， $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})+\cos(2x+\frac{\pi}{3})=\sqrt{5}\sin(2x+\frac{\pi}{3}+\varphi)$，

其中 $\cos\varphi=\frac{2\sqrt{5}}{5}$， $\sin\varphi=\frac{\sqrt{5}}{5}$，且 $\varphi\in(0,\frac{\pi}{2})$，注意此处 φ 不是变量，而是一个确定的非特殊锐角，

由题意， $g(x)=f(x-\frac{\pi}{6})=\sqrt{5}\sin[2(x-\frac{\pi}{6})+\frac{\pi}{3}+\varphi]=\sqrt{5}\sin(2x+\varphi)$，

要研究方程 $g(x)=m$ 根的情况，考虑画图分析，为了便于作图，将 $2x+\varphi$ 换元成 t，

令 $t=2x+\varphi$，则 $g(x)=\sqrt{5}\sin t$，当 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时， $t\in[\varphi,\pi+\varphi]$，函数 $y=\sqrt{5}\sin t$ 的部分图象如图所示，

$g(x)=m\Leftrightarrow\sqrt{5}\sin t=m$，因为 $g(x)=m$ 有两根 x_1， x_2，所以方程 $\sqrt{5}\sin t=m$ 有两根 t_1， t_2，

如图，直线 $y=m$ 与 $y=\sqrt{5}\sin t$ 在 $[\varphi,\pi+\varphi]$ 上的图象的两个交点的横坐标就是 t_1， t_2，

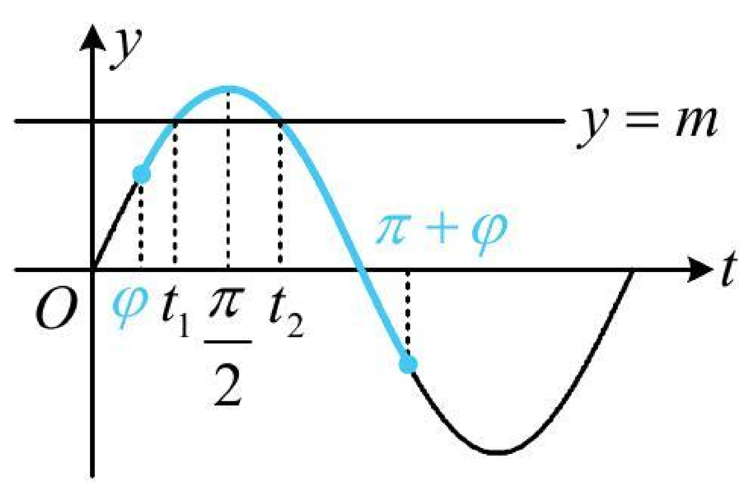
由图可知，两个交点关于直线 $t=\frac{\pi}{2}$ 对称，所以 $\frac{t_1+t_2}{2}=\frac{\pi}{2}$，

找到了 t_1 和 t_2 的关系，将变量 t 换回成 x，就能转换成 x_1 与 x_2 的关系，

又 $\begin{cases}t_1=2x_1+\varphi\\t_2=2x_2+\varphi\end{cases}$，两式相加整理得： $x_1+x_2=\frac{t_1+t_2}{2}-\varphi=\frac{\pi}{2}-\varphi$，

故 $\sin(x_1+x_2)=\sin(\frac{\pi}{2}-\varphi)=\cos\varphi=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

答案：A



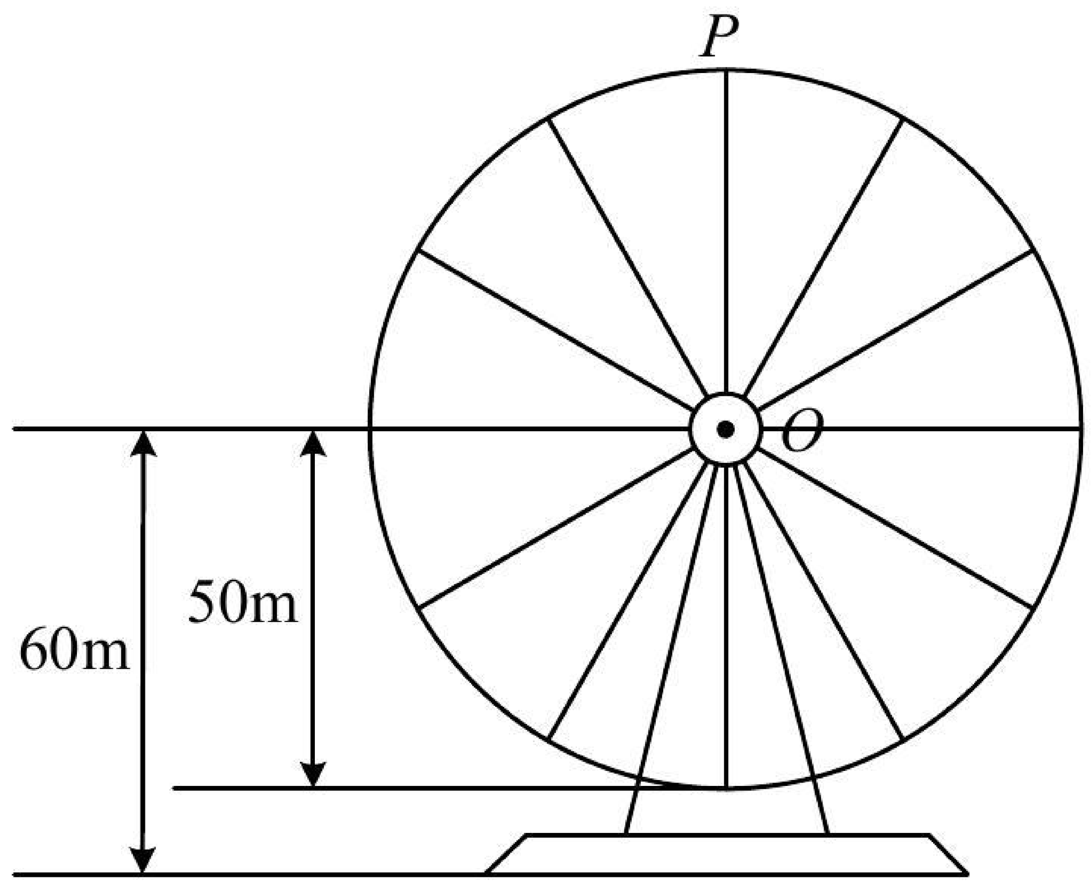
【例 3】如图，摩天轮的半径为 50m，其中心 O 距离地面的高度为 60m，摩天轮按逆时针方向匀速转动，且 20min 转一圈，若摩天轮上点 P 的初始位置为最高点，则摩天轮转动过程中下列说法正确的是（　　）

（A）转动 10min 后点 P 距离地面 8m

（B）若摩天轮转速减半，则转动一圈所需的时间变为原来的 $\frac{1}{2}$

（C）第 17min 和第 42min 点 P 距离地面的高度相同

（D）摩天轮转动一圈，点 P 距离地面的高度不低于 85m 的时间长为 $\frac{20}{3}$min



解析：先建立点 P 距离地面高度随时间变化的函数关系，可设该高度为 $f(t)=A\sin(\omega t+\varphi)+B$，其中 $A>0$，$\omega>0$，只要求出 A，B，ω，φ，解析式就有了，先由最大、最小值求 A 和 B，

由题意，点 P 最高为 110m，最低为 10m，所以 $\begin{cases}A+B=110\\-A+B=10\end{cases}$，解得：$A=50$，$B=60$，

再由初始位置求 φ，初始位置在最高点，所以 $f(0)=50\sin\varphi+60=110$，从而 $\sin\varphi=1$，故 $\varphi=\frac{\pi}{2}$，

最后由周期求 ω，由题意，20min 转一圈，所以 $T=20$，故 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{10}$，

所以 $f(t)=50\sin(\frac{\pi}{10}t+\frac{\pi}{2})+60=50\cos\frac{\pi}{10}t+60$，

A 项，$f(10)=50\cos(\frac{\pi}{10}\times 10)+60=50\cos\pi+60=10$，故 A 项错误；

B 项，若摩天轮转速减半，则转动一周的时间加倍，故 B 项错误；

C 项，$f(17)=50\cos(\frac{\pi}{10}\times 17)+60=50\cos\frac{17\pi}{10}+60$，$f(42)=50\cos(\frac{\pi}{10}\times 42)+60=50\cos\frac{21\pi}{5}+60$，

要判断 C 项是否正确，只需看 $\cos\frac{17\pi}{10}$ 和 $\cos\frac{21\pi}{5}$ 是否相等，用诱导公式化为锐角三角函数来看，

$\cos\frac{17\pi}{10}=\cos(\frac{17\pi}{10}-2\pi)=\cos(-\frac{3\pi}{10})=\cos\frac{3\pi}{10}$，$\cos\frac{21\pi}{5}=\cos(4\pi+\frac{\pi}{5})=\cos\frac{\pi}{5}$，

因为 $\cos\frac{3\pi}{10}\neq\cos\frac{\pi}{5}$，所以 $f(17)\neq f(42)$，故 C 项错误；

D 项，点 P 距离地面的高度不低于 85m 即 $f(t)\geq 85$，也即 $50\cos\frac{\pi}{10}t+60\geq 85$，所以 $\cos\frac{\pi}{10}t\geq\frac{1}{2}$，

我们可以作图分析在一个周期内，该不等式解的情况，不妨就考虑 $[0,20)$ 这个周期，

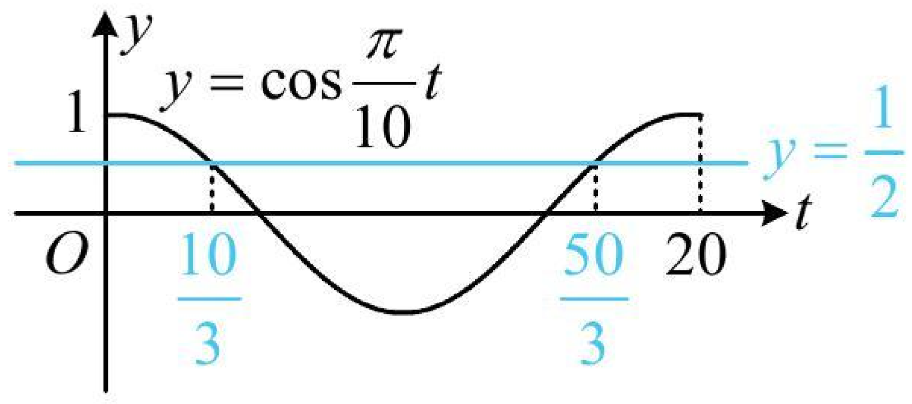
当 $0\leq t<20$ 时，$0\leq\frac{\pi}{10}t<2\pi$，令 $\cos\frac{\pi}{10}t=\frac{1}{2}$ 可得 $\frac{\pi}{10}t=\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{5\pi}{3}$，所以 $t=\frac{10}{3}$ 或 $\frac{50}{3}$，

如图，在 $[0,20)$ 这个周期内，$\cos\frac{\pi}{10}t\geq\frac{1}{2}$ 的解集为 $[0,\frac{10}{3}]\cup[\frac{50}{3},20)$，

故点 P 距离地面的高度不低于 85m 的时间长为

$\frac{10}{3}+(20-\frac{50}{3})=\frac{20}{3}$ min，故 D 项正确.

答案：D



类型Ⅴ：非合一结构的图象性质综合题

【例 4】（多选）已知函数 $f(x)=|\sin x|\cos x$，则下列说法正确的是（　　）

（A） $f(x)$ 的最小正周期是 4π

（B） $f(x)$ 的值域是 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

（C） $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$ 上单调递减

（D） $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{2},0)$ 对称

解析： A 项， $\sin x$ 和 $\cos x$ 的周期都是 2π ，所以猜想 2π 是 $f(x)$ 的周期，可用周期的定义来验证，

$f(x+2\pi)=|\sin(x+2\pi)|\cos(x+2\pi)=|\sin x|\cos x=f(x)\Rightarrow 2\pi$ 是 $f(x)$ 的周期，故 A 项错误；

B 项，已知了 2π 是周期，不妨在 $[0,2\pi)$ 这个周期内来求值域，可讨论 $\sin x$ 的正负，去掉绝对值，

当 $0\le x\le\pi$ 时， $\sin x\ge 0$， $f(x)=\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$；

当 $\pi<x<2\pi$ 时， $\sin x<0$， $f(x)=-\sin x\cos x=-\frac{1}{2}\sin 2x$；

结合 $f(x)$ 周期为 2π 可得 $f(x)$ 的大致图象如图，由图可知 $f(x)$ 的值域为 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$，故 B 项正确；

C 项，由图可知 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$ 上↘，故 C 项正确；

D 项，由图可知 $f(x)$ 关于点 $(\frac{\pi}{2},0)$ 对称，故 D 项正确.

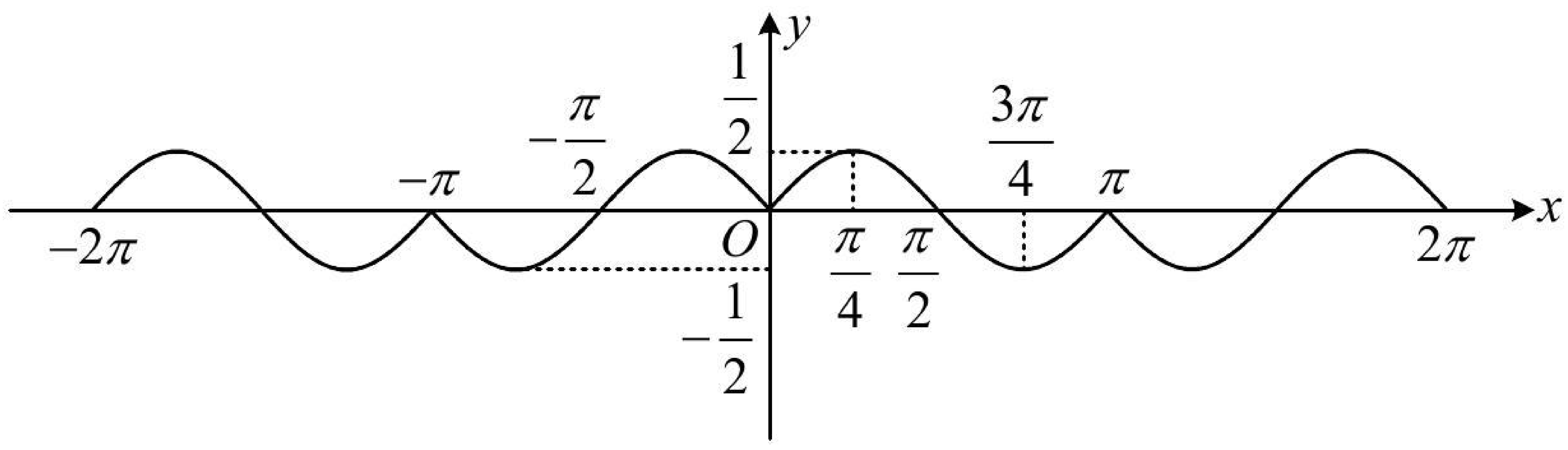
若从图象没看出来关于 $(\frac{\pi}{2},0)$ 对称，还可以用对称的结论判断，

$f(x)$ 是否关于点 $(\frac{\pi}{2},0)$ 对称，取决于 $f(\pi+x)+f(-x)=0$ 是否成立，

因为 $f(x+\pi)+f(-x)=|\sin(x+\pi)|\cos(x+\pi)+|\sin(-x)|\cos(-x)=|-\sin x|(-\cos x)+|\sin x|\cos x=0$，

所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{2},0)$ 对称.

答案： BCD



【反思】遇到让判断 $f(x)$ 的图象是否关于某点或某直线对称的问题，在第三章的第一模块“抽象函数问题”有详细归纳，如有疑惑可以查阅.

【例 5】（多选）已知函数 $f(x)=\sqrt{1+\cos x}+\sqrt{1-\cos x}$，则下列说法正确的有（　　）

（A）函数 $f(x)$ 是偶函数

（B）函数 $f(x)$ 的最小正周期为 2π

（C）函数 $f(x)$ 的值域为 $[\sqrt{2},2]$

（D）函数 $f(x)$ 的图象的相邻两条对称轴间的距离为 π

解析：A 项，$f(x)$ 的定义域为 **R**，且 $f(-x)=\sqrt{1+\cos(-x)}+\sqrt{1-\cos(-x)}=\sqrt{1+\cos x}+\sqrt{1-\cos x}=f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数，故 A 项正确；

B 项，2π 显然是 $f(x)$ 的周期，但是不是最小正周期呢？常常会尝试它的一半，看看 π 是否为周期，

$f(x+\pi)=\sqrt{1+\cos(x+\pi)}+\sqrt{1-\cos(x+\pi)}=\sqrt{1-\cos x}+\sqrt{1+\cos x}=f(x)\Rightarrow\pi$ 是 $f(x)$ 的一个周期，

所以 $f(x)$ 的最小正周期不是 2π，故 B 项错误；

C 项，要求值域，先化简 $f(x)$ 的解析式，看到 $1+\cos x$ 和 $1-\cos x$，自然想到升次公式，

$f(x)=\sqrt{1+\cos x}+\sqrt{1-\cos x}=\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}+\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}=\sqrt{2}(\left|\cos\frac{x}{2}\right|+\left|\sin\frac{x}{2}\right|)$，

根号已经去掉了，但还有绝对值，前面我们已经得到了 π 是 $f(x)$ 的一个周期，所以可在 $[0,\pi)$ 这个周期内考虑，先去绝对值，再求值域，

当 $x\in[0,\pi)$ 时，$\frac{x}{2}\in[0,\frac{\pi}{2})$，所以 $\cos\frac{x}{2}>0$，$\sin\frac{x}{2}\ge 0$，从而 $f(x)=\sqrt{2}(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2})=2\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})$，

要求此函数的值域，可将 $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}$ 换元成 t，借助 $y=2\sin t$ 的图象来分析，

令 $t=\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}$，则 $f(x)=2\sin t$，因为 $0\le x<\pi$，所以 $\frac{\pi}{4}\le t<\frac{3\pi}{4}$，

函数 $y=2\sin t$ 的部分图象如图 1 所示，由图可知 $f(x)$ 的值域为 $[\sqrt{2},2]$，故 C 项正确；

D 项，由 C 项知当 $x\in[0,\pi)$ 时，$f(x)=2\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})$，所以 $f(x)$ 的部分图象如图 2，

由图可知 $f(x)$ 的图象相邻两条对称轴间的距离为 $\frac{\pi}{2}$，故 D 项错误.

答案：AC

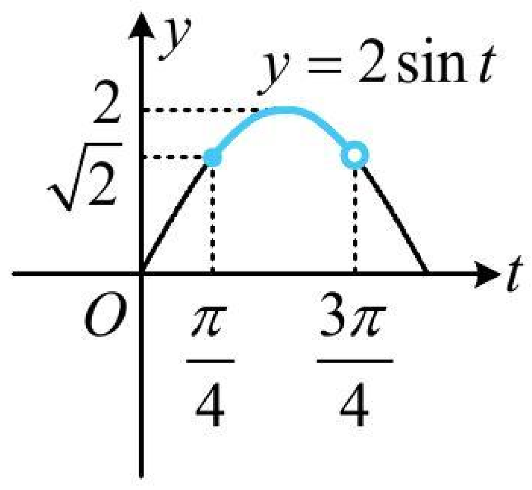


图1

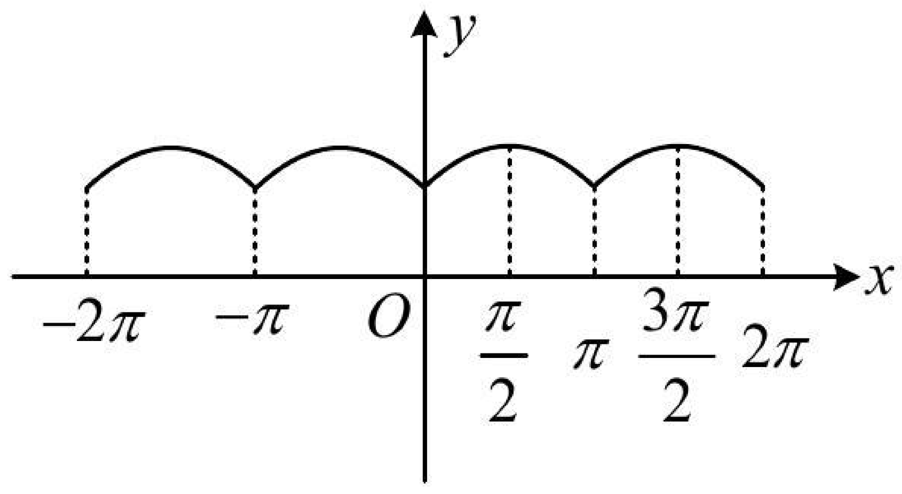


图2

强化训练

1．（2018·北京卷·★★）设 $f(x)=\cos(\omega x-\dfrac{\pi}{6})(\omega>0)$，若 $f(x)\le f(\dfrac{\pi}{4})$ 对任意实数 x 都成立，则 ω 的最小值为_____.

2．（★★★）已知函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})+2$，则 $f(\dfrac{\pi}{8})+f(\dfrac{2\pi}{8})+\cdots+f(\dfrac{13\pi}{8})=$（　　）

（A）0　（B）10　（C）16　（D）26

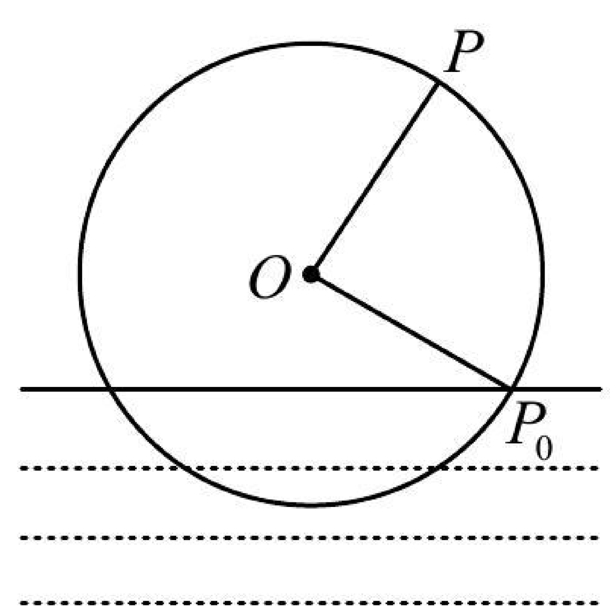
3．（2022·河南确山月考·★★★）一半径为 4.8m 的水轮如图所示，水轮圆心 O 距离水面 2.4m，已知水轮每 60s 逆时针转动一圈，如果当水轮上点 P 从水中浮现时（图中点 P_0）开始计时，则（　　）

（A）点 P 离水面的距离 d（单位：m）与时间 t（单位：s）的函数解析式为 $d=4.8\sin(\dfrac{\pi}{30}t-\dfrac{\pi}{6})-2.4$

（B）点 P 第一次到达最高点需要 10s

（C）在水轮转动的一圈内，点 P 离水面的高度不低于 4.8m 共有 10s 时间

（D）当水轮转动 50s 时，点 P 在水面下方，距离水面 2.4m



4.（2020・新课标III卷・★★★）关于函数 $f(x)=\sin x+\frac{1}{\sin x}$ 有如下四个命题：

① $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称；

② $f(x)$ 的图象关于原点对称；

③ $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称；

④ $f(x)$ 的最小值为 2.

其中所有真命题的序号是_____.

5.（2022・山西二模・★★★★）下面关于函数 $f(x)=\sin 2x+2|\sin x|\cos x$ 的结论，其中错误的是（　　）

（A） $f(x)$ 的值域是 $[-2,2]$

（B） $f(x)$ 是周期函数

（C） $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称

（D）当 $x\in(\pi,2\pi)$ 时， $f(x)=0$